



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**APLIKACE KVATERNIONŮ A CLIFFORDOVÝCH ALGEBER
V ROBOTICE**

APPLICATIONS OF QUATERNIONS AND CLIFFORD ALGEBRAS IN ROBOTICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jaroslav Hujňák

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Aleš Návrát, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Jaroslav Hujňák**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Mgr. Aleš Návrat, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Aplikace kvaternionů a Cliffordových algeber v robotice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Kvaterniony už se relativně hojně využívají všude tam, kde je potřeba efektivně počítat rotace, zejména v robotice a počítačové grafice. Matematicky lze kvaterniony chápat jako podalgebru Cliffordovy algebry $Cl(0,3)$. Úkolem je seznámit se s aplikacemi kvaternionů v robotice a prozkoumat možnost aplikace vyšších Cliffordových algeber.

Cíle bakalářské práce:

Student by se měl dobře seznámit především s kvaterniony a s rotováním pomocí kvaternionů. Dále by se měl naučit základy obecných Cliffordových algeber a tento aparát aplikovat na popis kinematiky konkrétního robotického systému.

Seznam doporučené literatury:

PERWASS, Ch. Geometric Algebra with Applications in Engineering. Berlin: Springer Verlag, 2009. ISBN 978-3-540-89068-3.

ABLAMOWICZ, R. and B. FAUSER. A Maple Package for Clifford. (Co)Algebra Computations, CLIFFORD/Bigebra.

GONZALEZ-JIMENEZ, L., CARBAJAL-ESPINOZA, O., LOUKIANOV A. and E. BARYO-CORROCHANO. Robust Pose Control of Robot Manipulators Using Conformal Geometric Algebra. Adv. App. Clifford Algebr. 24 (2), 533-552, 2014.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zaměřuje na Cliffordovy alebry a jejich podalgebry, kvaterniony a geometrickou algebru $G(3,1)$. V práci je popsán teoretický základ Cliffordových algeber, který je využit v kapitole věnující se geometrické algebře $G(3,1)$. S využitím objektů a transformací, které se v geometrické algebře $G(3,1)$ vyskytují, jsou uvedeny příklady využití v robotických systémech.

Summary

This bachelor thesis focuses on Clifford algebras and their subalgebras, quaternions and geometric algebra $G(3,1)$. The thesis describes teoretical basis of Clifford algebras, which is used in chapter dedicated to geometric algebra $G(3,1)$. Examples of applications geometric algebra $G(3,1)$ in robotic systems are shown by using transformations and objects of that algebra.

Klíčová slova

kvaterniony, rotace, Cliffordova algebra, vnější součin, vnitřní součin, Geometrická algebra, inverzní kinematika

Keywords

quaternions, rotation, Clifford algebras, outer product, inner product, Geometric algebra, inverse kinematics

HUJŇÁK, J. *Aplikace kvaternionů a Cliffordových algeber v robotice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 41 s. Vedoucí Mgr. Aleš Návrát, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Aplikace kvaternionů a Cliffordových algeber v robotice* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Aleše Návrata, Ph. D. a užitím materiálů uvedených v seznamu literatury

Jaroslav Hujňák

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Aleši Návratovi, Ph. D. za konzultace, vedení a poskytnutí materiálů při psaní této práce.

Jaroslav Hujňák

Obsah

Úvod	12
1 Kvaterniony	13
1.1 Algebra kvaternionů	13
1.2 Rotace v trojrozměrném prostoru	15
1.3 Aplikace kvaternionů	16
2 Cliffordova algebra	17
2.1 Základní definice	17
2.2 Involuce	21
2.3 Příklady Cliffordových algeber	22
2.3.1 Cliffordova algebra $Cl(2,0)$	22
2.3.2 Cliffordova algebra $Cl(3,0)$	23
2.3.3 Cliffordova algebra $Cl(3,1)$	24
3 Geometrická algebra $G(3,1)$	25
3.1 Algebraická struktura	25
3.1.1 Vložení bodů do $G(3,1)$	25
3.1.2 Vzdálenost dvou bodů	25
3.2 Reprezentace objektů	26
3.3 Geometrické objekty vyskytující se v $G(3,1)$	26
3.3.1 Dvojbod	26
3.3.2 Kružnice	26
3.3.3 Přímka	28
3.4 Vzdálenosti a úhly v geometrické algebře	29
3.4.1 Vzdálenost bodu a přímky	29
3.4.2 Vzdálenost přímky a kružnice	30
3.4.3 Úhel mezi dvěma přímkami	30
3.4.4 Tečná vzdálenost bodu od kružnice	30
3.4.5 Vzdálenost dvou kružnic	30
3.5 Transformace v geometrické algebře $G(3,1)$	31
3.5.1 Reflexe	31
3.5.2 Rotace se středem v počátku	31
3.5.3 Translace	32
3.5.4 Obecná rotace	32
3.5.5 Složený pohyb	33
3.6 Aplikace geometrické algebry	33
3.6.1 Inverzní kinematika	34
3.6.2 Diskretizace pohybu	36
3.6.3 Prokládání kružnic či přímk body	38
3.6.4 Detekce kružnic v obraze	38
Závěr	40
Seznam použité literatury	41

Úvod

Geometrická algebra je velice vhodným nástrojem pro počítání rotací, není tedy žádným překvapením, že je hojně využívána v robotice a počítačové grafice. Geometrické algebry jsou Cliffordovy algebry spolu s vložením Euklidovské roviny. Cliffordovy algebry vznikly v roce 1882 propojením Grassmanovy vnější algebry s kvaterniony. Právě kvaterniony, Cliffordovy algebry a geometrická algebra $G(3,1)$ jsou předmětem této bakalářské práce.

Samotná bakalářská práce je členěna na tři kapitoly. První kapitola je zaměřena na kvaterniony, především na jejich teoretický základ a aplikaci kvaternionů k rotování robotických systémů. Kapitulu uzavírají výhody rotování pomocí kvaternionů vůči rotování pomocí Eulerových úhlů.

Druhá kapitola se zabývá Cliffordovými algebrami. Jsou zde popsány základní pojmy týkající se Cliffordových algeber, jako jsou například báze, vnitřní součin či reverze. Každý z uvedených pojmů je vysvětlen na příkladu z konkrétní Cliffordové algebry, a to sice $Cl(3,1)$. Na závěr druhé kapitoly jsou uvedeny příklady Cliffordových algeber.

Třetí kapitola navazuje plynule na Cliffordovy algebry a věnuje se geometrické algebře $G(3,1)$. Jsou zde uvedeny objekty vyskytující se v algebře, body, přímky a kružnice. Dále jsou zde uvedeny transformace, které nám algebra $G(3,1)$ umožňuje. Jedná se o reflexe, translace, rotace, rotace kolem obecného bodu a složený pohyb. Každý z objektů a transformací je rozebrán v této kapitole. V kapitole jsou uvedeny konkrétní příklady využití geometrické algebry $G(3,1)$ k popisu kinematiky použitelné v robotickém systému. K jejich realizaci je využit program GAALOP. Ten byl vytvořen Dietmarem Hildenbrandem k usnadnění práce právě s geometrickými algebrami a je volně stažitelný z <http://www.gaalop.de/download/>.

1. Kvaterniony

Kvaterniony jsou mocným nástrojem, který umožňuje spočítat rotaci v prostoru. Jejich základy položil Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Jedná se o nekomutativní rozšíření oboru komplexních čísel. Tato kapitola je vypracována s použitím literatury 6 a 8.

1.1. Algebra kvaternionů

Definice 1. *Kvaternionem* nazveme číslo ve tvaru $q = a + bi + cj + dk$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a i, j, k jsou imaginární jednotky, pro které platí:

$$ijk = i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (1.1)$$

Jednoduchou úpravou lze ukázat, že

$$ij = -ji = k, \quad (1.2)$$

a obdobně

$$ki = -ik = j \quad (1.3)$$

$$jk = -kj = i \quad (1.4)$$

Množinu všech kvaternionů značíme \mathbb{H} . Součet kvaternionů je zaveden součtem odpovídajících si složek.

Kvaternion se dá zapsat také pomocí jeho skalární a vektorové části.

$$q = S(q) + V(q), \quad S(q) = a \quad V(q) = bi + cj + dk \quad (1.5)$$

Lze vidět, že operace sčítání je v algebře kvaternionů komutativní a asociativní. Je zřejmé, že 0 je neutrální prvek vzhledem ke sčítání a ke každému kvaternionu $x = a + bi + cj + dk$ existuje právě jeden kvaternion $-x = -a - bi - cj - dk$ takový, že $x + (-x) = 0$. Kvaternion 0 nazveme *nulový kvaternion* a kvaternion $-x$ nazveme *inverzním kvaternionem ke kvaternionu x vzhledem ke sčítání*. Množina kvaternionů s operací sčítání tedy tvoří komutativní grupu.

Poznámka 1. Vezměme 2 libovolné kvaterniony $q, r \in \mathbb{H}$, kde $q = a + bi + cj + dk$ a $r = e + fi + gj + hk$. Potom jejich součin vypadá následovně následovně:

$$\begin{aligned} qr &= ae + afi + agj + ahk + bei + bfi^2 + bgij + bhik + cej + \\ &\quad cfji + cgj^2 + chjk + dek + dfki + dgkj + dhk^2 = \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + (ag - bh + ce + df)j + (ah + bg - cf + de)k \end{aligned}$$

Násobení kvaternionů není obecně komutativní ani antikomutativní, což ukáží na následujícím jednoduchém příkladu. Neutrální prvek vzhledem k násobení je 1.

Příklad 1. Mějme kvaterniony $q = 2 + i + 2j$ a $r = 1 - 2i + j$. Určíme součiny qr, rq .

$$qr = (2 + i + 2j)(1 - 2i + j) = 2 - 4i + 2j + i - 2i^2 + ij + 2j - 4ji + 2j^2 = 2 - 3i + 4j + 5k$$

$$rq = (1 - 2i + j)(2 + i + 2j) = 2 + i + 2j - 4i - 2i^2 - 4ij + 2j + ji + 2j^2 = 2 - 3i + 4j - 5k$$

1.1. ALGEBRA KVATERNIONŮ

Definice 2. Kvaternion $q \in \mathbb{H}$ nazveme *ryzím*, právě tehdy když je jeho skalární složka rovna nule.

Definice 3. Necht $q \in \mathbb{H}$. Pojmem *kvaternion konjugovaný ke kvaternionu q* rozumíme kvaternion tvaru $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

Poznámka 2. Zřejmě platí $\bar{\bar{q}} = q$

Věta 1. Vezměme 2 různé kvaterniony $x, y \in \mathbb{H}$, pak pro ně platí : $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$

Důkaz Necht $x = a + bi + cj + dk$ a $y = e + fi + gj + hk$.

$$\begin{aligned}\overline{xy} &= (ae - bf - cg - dh) + (-af - be - ch + dg)i \\ &\quad + (-ag + bh - ce - df)j + (-ah - bg + cf - de)k \\ \bar{y}\bar{x} &= (a - bi - cj - dk)(e - fi - gj - hk) \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (-af - be - ch + dg)i \\ &\quad + (-ag + bh - ce - df)j + (-ah - bg + cf - de)k\end{aligned}$$

Definice 4. Necht $q \in \mathbb{H}$ a \bar{q} je kvaternion konjugovaný ke kvaternionu q . *Normou kvaternionu* rozumíme zobrazení $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, definované vztahem

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$$

Poznámka 3.

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Definice 5. *Jednotkovým kvaternionem* nazveme takový kvaternion $q \in \mathbb{H}$, jehož norma se rovná 1. Tedy $\|q\| = 1$.

Poznámka 4. Jednotkový kvaternion budu v bakalářské práci značit q , ryzí kvaternion r .

Věta 2. Necht $x \in \mathbb{H}$ je libovolný nenulový kvaternion. Pak existuje jediný *inverzní kvaternion* takový, že

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{\|x\|^2}$$

Důkaz Důkaz provedeme sporem. Necht existují $a_1, a_2 \in \mathbb{H}$ dva různé kvaterniony inverzní k $x \in \mathbb{H}$. To znamená, že

$$a_1 = a_1 1 = a_1(xa_2) = (a_1x)a_2 = 1a_2 = a_2.$$

Dokázali jsme tedy, že $a_1 = a_2$. To je ale spor s předpoklady.

Definice 6. Necht $x, y, z \in \mathbb{H}$ jsou různé kvaterniony, pak pro ně platí následující vlastnosti :

- asociativita : $(xy)z = x(yz)$
- platí levá i pravá distribuce vzhledem ke sčítání, tedy:

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

1.2. Rotace v trojrozměrném prostoru

Věta 3. Vezměme libovolný jednotkový kvaternion q a ryzí kvaternion r , pak $\|r\| = \|qrq^{-1}\|$.

Důkaz K důkazu využijeme větu 1 a definice 4 a 5.

$$\|qrq^{-1}\| = \sqrt{qrq^{-1}\overline{qrq^{-1}}} = \sqrt{qrq^{-1}\bar{q}^{-1}\bar{r}\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}}\|r\|\sqrt{\bar{q}^{-1}} = \|r\|\sqrt{\bar{q}}\sqrt{\bar{q}^{-1}} = \|r\|$$

Poznámka 5. Každý jednotkový kvaternion lze zapsat pomocí Eulerovy formule

$$q = e^{\frac{\alpha}{2}(bi+cj+dk)} = \cos \frac{\alpha}{2} + (bi + cj + dk) \sin \frac{\alpha}{2}$$

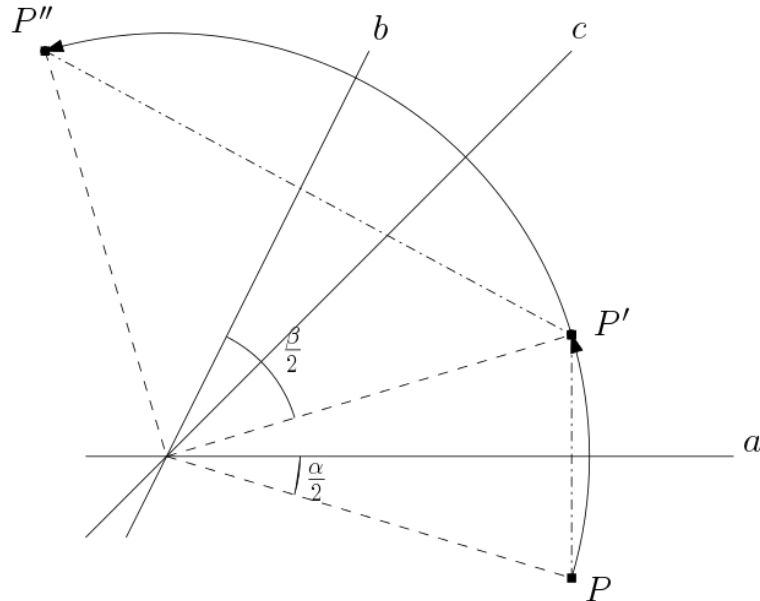
Věta 4. Vezměme jednotkový kvaternion $q \in \mathbb{H}$ a ryzí kvaternion $r = bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, pak zobrazení $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : r \rightarrow qrq^{-1}$ představuje rotaci se středem v počátku, podle osy $o = (b, c, d)$.

Důkaz Důkaz je možný k nalezení v literatuře 9.

Rotace kvaternionu je vždy možná pouze podle počátku. Chceme-li orotovat kvaternion podle osy, která jím neprochází, je nutné ho posunout, orotovat a následně posunout zpět.

Poznámka 6. Každou rotaci je možné vyjádřit dvěma kvaterniony, a to q a $-q$, jelikož platí : $qrq^{-1} = 1qrq^{-1} = (-q)r(-q^{-1})$.

Složení dvou rotací je velmi intuitivní. Nejprve orotujeme kvaternion podle jedné osy a poté podle druhé. S využitím vztahu 5 můžeme vyjádřit složení rotací jako: $e^{\frac{\gamma}{2}(xi+yj+zk)} = e^{\frac{\alpha}{2}(li+mj+nk)}e^{\frac{\beta}{2}(fi+gj+hk)}$. Osy rotace označme $a = (li + mj + nk)$, $b = (fi + gj + hk)$ a $c = (xi + yj + zk)$.



Obrázek 1.1: Graf složení rotací pomocí kvaternionů

1.3. Aplikace kvaternionů

Kvaterniony se aktuálně nejvíce využívají při počítačových animacích. Konkrétně při transformaci orientace grafických objektů. Jejich využitím zamezíme nežádoucím problémům, které vznikají při rotování pomocí Eulerových úhlů, zejména problému známému jako gimbal lock.

Poznámka 7. Gimbal lock je problém, který vzniká při souhlasné orientaci dvou os rotace v 3D prostoru, chceme-li poté objekt otočit do jiné polohy, může být trajektorie velmi složitá křivka.

Dalším využitím je vytvoření systému, umožňujícího schopnost orientace bezpilotního prostředku. Bepilotní prostředky naleznou využití v operacích, kde je nevhodné vystavovat pilotované prostředky a jejich obsluhu pro velmi pravděpodobnou možnost zničení. Pro funkci bezpilotního prostředku je nezbytné znát polohové úhly (orientaci, úhly natočení vůči referenčnímu souřadnicovému systému). Tato informace umožňuje prostředkům pohybovat se požadovaným směrem a vykonávat zadanou funkci. Pro reprezentaci vypočítané orientace letounu se používají právě kvaterniony.

Kvaterniony se dále využívají v interaktivních modelech, které mohou pomoci lékařům při léčbě zlomeniny, kdy je nutné přiložit tvarovatelnou dlahu přímo na kost a připevnit ji pomocí fixačních šroubů. Vytváří se obecný virtuální model dlahy. Hledá se vhodný způsob pro umísťování dlahy na povrch trojrozměrného modelu kosti. Pro vytvoření trojrozměrného obrazu kosti potřebujeme vytvořit základní aplikaci umožňující zobrazení trojrozměrné scény, vhodný systém pro správu objektů, implementaci základních operací a další. Důležitá je manipulace s objekty, kde se využívají operace posunutí, otočení, změna měřítko a zkosení. Právě při operaci otáčení se používají kvaterniony. Ty totiž neobsahují zbytečné údaje a přechod z jedné obecné polohy do jiné lze vyřešit lépe než pomocí Eulerových úhlů.

2. Cliffordova algebra

V této kapitole se budeme věnovat Cliffordovým algebřám. K tomu abychom mohli uvést definici Cliffordových algeber, potřebujeme nejprve uvést definice kvadratické formy, signatury a vnější algebry.

Tato kapitola byla vypracována na základě literatury 4,5,7. Důkaz věty 5 je k nalezení v literatuře 4, str. 323. Důkaz věty 6 je k nalezení v literatuře 4, str. 366.

2.1. Základní definice

Definice 7. *Bilineární formou* na reálném vektorovém prostoru V budeme rozumět každé zobrazení B kartézského součinu $V \times V$ do pole reálných čísel \mathbb{R} , které je lineární v obou složkách.

Symetrickou bilineární formou rozumíme formu B , pro kterou platí $B(u, v) = B(v, u)$.

Antisymetrickou bilineární formou rozumíme formu B , pro kterou platí $B(u, v) = -B(v, u)$.

Definice 8. Nechť V je libovolný vektorový prostor a e_1, e_2, \dots, e_n je jeho báze. Maticí bilineární formy rozumíme matici

$$B = \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \dots & B(e_1, e_n) \\ & \ddots & \\ B(e_n, e_1) & \dots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix}$$

Definice 9. *Kvadratickou formou* na prostoru V budeme rozumět každé zobrazení Q prostoru V do pole reálných čísel \mathbb{R} , ke kterému existuje bilineární forma B taková, že pro $\forall v \in V$ je $Q(v) = B(v, v)$; budeme říkat, že kvadratická forma Q je vytvořena bilineární formou B . Matice kvadratické formy je symetrická matice, která je stejná jako matice v definici 8.

Kvadratickou formu tedy můžeme napsat pomocí bilineární formy. Existuje ale i opačný vztah, vyjadřující bilineární formu z kvadratické, a to následovně:

$$B(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$$

Věta 5. {Spektrální rozklad symetrických matic}. Pro každou symetrickou matici

$A \in R^{n \times n}$ existuje ortogonální matice $P \in R^{n \times n}$ a diagonální matice $D \in R^{n \times n}$ tak, že $A = PDP^T$.

Vydělíme-li každý řádek diagonální matice příslušným číslem, dostaneme diagonální matici pouze s 0, 1 a -1. Tím dostáváme Sylvestrův zákon setrvačnosti.

Věta 6. (Sylvestrův zákon setrvačnosti) Každou kvadratickou formu na reálném prostoru V dimenze n , lze vyjádřit v souřadnicích vhodné báze ve tvaru

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2, r \leq n, \quad (2.1)$$

přičemž počet koeficientů 1 a -1 je nezávislý na volbě báze.

Definice 10. *Signatura* kvadratické formy Q je trojice čísel (p, q, r) , kde p je počet 1, q je počet -1, r je počet 0, ve vyjádření předešlé věty.

2.1. ZÁKLADNÍ DEFINICE

Definice 11. Vektorový prostor \mathbb{R} s kvadratickou formou nazveme *kvadratickým vektorovým prostorem* $\mathbb{R}^{p,q}$, kde p, q je signatura kvadratické formy. Vektorový prostor má kanonickou bázi vyjádřenou ve větě (2.1) a značíme ji $\bar{\mathbb{R}}^{p,q}$.

Definice 12. Vnější algebrou $\wedge \mathbb{R}^n$ lineárního prostoru \mathbb{R}^n nazveme asociativní algebru dimenze 2^n s bází

$$\begin{aligned} &1 \\ &e_1, e_2, \dots, e_n \\ &e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, \dots, e_1 \wedge e_n, e_2 \wedge e_3, \dots, e_{n-1} \wedge e_n \\ &\vdots \\ &e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n, \end{aligned}$$

kde e_1, e_2, \dots, e_n je báze prostoru \mathbb{R}^n . Ve vnější algebře je definován vnější součin.

$$\begin{aligned} e_i \wedge e_j &= -e_j \wedge e_i \text{ pro } i \neq j \\ e_i \wedge e_i &= 0 \end{aligned}$$

Na následujících příkladech ukáží, jak s vnějším součinem pracujeme.

Příklad 2.

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_2 &= -e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 \wedge e_4 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \\ e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_3 &= -e_1 \wedge e_3 \wedge e_3 \wedge e_4 = 0 \end{aligned}$$

Poznámka 8. V Cliffordové algebře bude platit podobný vztah, a to sice:

$$\begin{aligned} e_i e_j &= -e_j e_i \text{ pro } i \neq j \\ e_i e_i &= \pm 1 \end{aligned}$$

Definice 13. Necht (V, Q) je kvadratický vektorový prostor. *Cliffordovou algebrou* $Cl(Q)$ nazveme asociativní algebru generovanou vektorovým prostorem V , která splňuje:

$$\forall x \in V : xx = Q(x) \quad (2.2)$$

Cliffordova algebra se většinou nezapisuje pomocí kvadratické formy, ale podle její signatury:

$$Cl(p, q) = Cl(Q), \text{ kde } (p, q) \text{ je signatura kvadratické formy } Q.$$

Poznámka 9. V Cliffordové algebře $Cl(p, q)$ s kanonickou bází $\bar{\mathbb{R}}^{p,q}$ platí:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= 1 \text{ pro } i \leq p \\ e_i^2 &= -1 \text{ pro } p < i \leq q \\ e_i e_j &= -e_j e_i \\ e_i e_j &= e_i \wedge e_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pro dva vektory $u, v \in Cl(Q)$ s příslušnou bilineární formou B obecně platí :

$$uv = u \wedge v + B(u, v) \quad (2.4)$$

Vlastnosti Cliffordova součinu Algebraický (Cliffordův) součin má následující vlastnosti. Nechť $A, B, C \in Cl(p, q)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- (i) $AB \in Cl_n$,
- (ii) $(AB)C = A(BC)$,
- (iii) $A(B + C) = AB + AC$,
- (iv) $\alpha A = A\alpha = \alpha \cdot A$,

Jedná se o uzavřenost, asociativitu, distributivitu a komutativitu vzhledem k násobení skálarem. Tyto vlastnosti platí pro všechny asociativní algebry. Cliffordova algebra je ale význačná v tom, že platí i následující vlastnost:

Nechť $a \in \mathbb{R}^{p,q} \subset Cl(p, q)$, pak

$$aa \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Z definice vnější algebry (12) a cliffordové algebry (13) je zřejmé, že báze vnější algebry a Cliffordové algebry jsou shodné. Tedy bázi $Cl(p, q)$ můžeme psát jako:

$$\begin{aligned} &1 \\ &e_1, e_2, \dots, e_{p+q} \\ &e_1e_2, e_1e_3, \dots, e_1e_{p+q}, e_2e_3, \dots, e_{p+q-1}e_{p+q} \\ &\vdots \\ &e_1e_2 \dots e_{p+q} \end{aligned}$$

Definice 14. Jako *bázový blade* v $Cl(p, q)$ označíme algebraický součin určitého počtu různých prvků kanonické báze $\bar{\mathbb{R}}^{p,q}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$.

Příklad 3. Cliffordova algebra $Cl(3, 1)$ má následující bázové blady

$$1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}, e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}, e_{1234} \quad (2.6)$$

Dostáváme 2^{p+q} možností jak zkombinovat algebraické součiny ortogonálních bázových prvků tak, aby byly po dvou lineárně nezávislé.

Definice 15. *Stupněm bázového blade* označíme počet prvků kanonické báze $\bar{\mathbb{R}}^{p,q}$, které jsou mezi sebou vynásobené. Budeme jej značit $gr()$.

Poznámka 10. Cliffordova algebra $Cl(3, 1)$ tedy obsahuje 1 prvek stupně 0, 4 prvky stupně 1, 6 prvků stupně 2, 4 prvky stupně 3 a 1 prvek stupně 4

Definice 16. Lineární kombinaci bladů s různým stupněm nazveme *multivektor*.

Bázové blady je také možné zapisovat pomocí indexu a to podle pořadí v kanonické bázi. Takto vyjádřený bázový blade se nám bude hodit při definici reverzního prvku. Vezměme v úvahu Cliffordovu algebru $Cl(3, 1)$. Kanonická báze této algebry je uvedena v (2.6). Díky tomuto způsobu zápisu bladů můžeme kanonickou bázi této algebry zapsat jako :

$$\overline{Cl}_{3,1} = \{E_1, E_2, \dots, E_{p+q}\}$$

2.1. ZÁKLADNÍ DEFINICE

Poznámka 11. Bázový blade E_9 v této algebře je tedy $E_9 = e_{23}$.

Každý multivektor algebry můžeme zapsat v sumačním zápisu následovně:

$$A = \sum_{i=1}^{2^{p+q}} a^i E_i, \quad E_i \in Cl(p, q), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Rovnice (2.4) vyjadřuje algebraický součin dvou vektorů jako součet vnějšího a skalárního součinu. Pro dva obecné prvky Cliffordové algebry ale tento vztah neplatí. Pro vyjádření obecného vztahu musíme nejprve nadefinovat vnitřní součin. Ten nadefinujeme pomocí levé kontrakce.

Definice 17. *Levou kontrakcí* „ \cdot “ nazveme zobrazení definované následujícími vztahy. Nechť $x, y \in \mathbb{R}^{p,q}$; $A, B, C \in Cl(p, q)$ a $gr(A) = k$, potom

- (i) $x \cdot y = B(x, y)$
- (ii) $x \cdot (A \wedge B) = (x \cdot A) \wedge B + (-1)^k A \wedge (x \cdot B)$
- (iii) $(A \wedge B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Vnitřním součinem dvou prvků $A, B \in Cl(Q)$ budeme rozumět levou kontrakci $A \cdot B$ (resp $B \cdot A$), pro kterou $gr(A) \leq gr(B)$ (resp $gr(A) \geq gr(B)$).

Poznámka 12. Pro vnitřní součin vektorů vyplývá z 2. vlastnosti levé kontrakce následující vztah:

$$a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b \quad (2.7)$$

Díky definici levé kontrakce 17 mohu pronést následující větu:

Věta 7. Vezměme $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ a $A \in Cl(p, q)$, potom platí :

$$xA = x \cdot A + x \wedge A,$$

kde xA značí algebraický součin, $x \cdot A$ značí vnitřní součin a $x \wedge A$ vnější součin. Tato věta se dá rozšířit na celou Cliffordovu algebru, platí tedy i pro součin dvou multivektorů.

Poznámka 13. Nechť $E_{\langle k \rangle}, E_{\langle l \rangle} \in Cl(p, q)$ jsou bázové blade stupně k a l . Pokud mají 2 bázové blade společných m bázových bladů, pak

$$E_{\langle k \rangle} E_{\langle l \rangle} = \langle E_{\langle k \rangle} E_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l-2m}$$

Prvek nejvyššího stupně, tedy $\langle E_{\langle k \rangle} E_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l}$, představuje vnější součin a prvek nejnižšího stupně $\langle E_{\langle k \rangle} E_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|}$ představuje vnitřní součin.

Součin multivektorů odpovídá lineární kombinaci prvků z poznámky (13).

Příklad 4. Opět vezměme v úvahu Cliffordovu algebru $Cl(3, 1)$.

$$(e_1 e_2 + e_2 e_3 e_4)(e_3 e_4 e_1 + e_2) = e_{12341} + e_{122} + e_{234341} + e_{2342} = -e_{234} + e_1 + e_{21} + e_{34}$$

2.2. Involuce

Důležitým pojmem v Cliffordových algebrách jsou involuce. Jsou to takové operace, které mapují prvek sám na sebe, když jsou použity dvakrát. Využití takovéto operace najdeme v aplikacích Cliffordových algeber, konkrétně v rotacích.

Jedním z takovýchto prvků je inverze, ta je obecně v algebře popsána vztahem

$$A^{-1}A = AA^{-1} = 1,$$

kde A je prvek algebry. Např. inverzní vektor $v^{-1} \in Cl(p, q)$ je

$$v^{-1} = \frac{v}{v \cdot v}$$

Takovýto prvek je inverzním vektorem, jelikož s využitím (2.2) platí

$$v^{-1}v = \frac{v}{v \cdot v}v = \frac{vv}{v \cdot v} = \frac{v \cdot v}{v \cdot v} = 1$$

Nejčastěji využívaným involučním prvkem je reverze. Její výhoda je ve velmi rychlém určení tvaru reverzního prvku.

Definice 18. Necht E_i je bázový blade Cliffordovy algebry, pak *reverzním bázovým blade* \tilde{E}_i nazveme prvek definovaný jako :

$$\tilde{E}_i = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} E_i, \quad (2.8)$$

kde k je stupeň příslušného prvku kanonické báze. Dále necht A je multivektor Cliffordovy algebry, pak reverzním multivektorem nazveme prvek definovaný jako :

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{2^{p+q}} a^i \tilde{E}_i \quad (2.9)$$

Z rovnice definice reverzního blade 18 se dá ukázat, že reverzi získáme prohozením pořadí ortogonálních bází v blade.

Příklad Necht $A \in Cl(3, 1)$ a je tvaru $A = a_1 e_2 e_3 + a_2 e_1 e_2 e_3 = a_1 E_9 + a_2 E_{12}$, pak

$$\tilde{A} = a_1 (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} E_9 + a_2 (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}} E_{12} = a_1 (-1)^1 e_2 e_3 + a_2 (-1)^3 e_1 e_2 e_3 = a_1 e_3 e_2 + a_2 e_2 e_1 e_3$$

Pomocí reverzního multivektoru můžeme nyní vyjádřit i inverzní multivektor.

Věta 8. Mějme multivektor $A \in Cl(p, q)$, pak inverzní multivektor A^{-1} je tvaru

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{A\tilde{A}}$$

2.3. PŘÍKLADY CLIFFORDOVÝCH ALGEBER

Důkaz $AA^{-1} = A \frac{\tilde{A}}{A\tilde{A}} = \frac{A\tilde{A}}{A\tilde{A}} = 1$

Definice 19. Prvek s největším stupněm kanonické báze $Cl(p, q)$ nazveme *pseudoskalár* a označíme jej I .

Příklad 5. V Cliffordové algebře $Cl(3, 1)$, je pseudoskalárem $I = e_1e_2e_3e_4$.

Rozdělení prvků v Cliffordových algebrách má binomické rozdělení. Počet obecného prvku k -tého řádu je tedy $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, kde n je počet bázových vektorů v algebře. Pro největší prvek tedy platí, že se v algebře vyskytuje právě $\binom{n}{n} = 1$.

Věta 9. Každá algebra má právě jeden *pseudoskalár*.

Definice 20. Nechť A je libovolný multivektor Cliffordovy algebry, pak *duálním prvkem* A^* rozumíme prvek, který splňuje $A^* = AI^{-1}$, kde I je pseudoskalár příslušné Cliffordovy algebry.

Lemma Nechť $E_{\langle k \rangle} \in Cl(p, q)$ a I je pseudoskalár této algebry, pak $E_{\langle k \rangle}I = E_{\langle k \rangle} \cdot I$.

Důkaz E_i je bázový blade příslušné algebry. Jelikož I je algebraický součin všech ortogonálních bází příslušné algebry, pak má s E_i právě k společných bází. Tedy $E_iI = \langle E_iI \rangle_{|k-p+q|} = E_i \cdot I$ pro všechna i . Platí to tedy i pro lineární kombinaci bladů.

Věta 10. Nechť $A, B \in Cl(p, q)$, pak platí následující vztah:

$$(A \wedge B)^* = A \cdot B^* \quad (2.10)$$

Důkaz Důkaz provedeme s využitím předchozího lemmatu a definic levé kontrakce 17 a duality 20.

$$(A \wedge B)^* = (A \wedge B)I^{-1} = (A \wedge B) \cdot I^{-1} = A \cdot (B \cdot I^{-1}) = A \cdot B^*$$

2.3. Příklady Cliffordových algeber

2.3.1. Cliffordova algebra $Cl(2, 0)$

Algebra, která má bázi $1, e_1, e_2, e_{12}$, se nazývá Cliffordova algebra, $Cl(2, 0)$. Obecný multivektor v této algebře je ve tvaru:

$$u = u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_{12}.$$

Přičemž platí :

$$\begin{aligned} e_1^2 &= 1, \\ e_2^2 &= 1, \\ e_{12} &= -e_{21}. \end{aligned}$$

Z posledních rovností můžeme odvodit i další důležité vztahy.

$$\begin{aligned} e_{12}^2 &= -1 \\ e_1 e_{12} &= e_1 e_1 e_2 = 1 e_2 = e_2 \\ e_{12} e_1 &= e_1 e_2 e_1 = -e_2 e_1 e_1 = -e_2 1 = -e_2 \end{aligned}$$

Vidíme, že $(e_1 e_2)^2$ má stejný význam jako imaginární jednotka. Dostáváme tedy algebru, která je izomorfní s algebrou komplexních čísel. Tato algebra nám umožňuje popsat rotaci v rovině.

2.3.2. Cliffordova algebra $Cl(3,0)$

První kapitola je věnovaná kvaternionům. Ukážeme, že algebra kvaternionů je podalgebrou Cliffordovy algebry $Cl(3,0)$. Obecný prvek této algebry je ve tvaru:

$$u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_1 e_2 + u_5 e_1 e_3 + u_6 e_2 e_3 + u_7 e_1 e_2 e_3,$$

kde $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = 1$. Dostáváme tabulku:

	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{123}
e_1	1	e_{12}	e_{13}	e_2	e_3	e_{123}	e_{23}
e_2	e_{21}	1	e_{23}	$-e_1$	$-e_{123}$	e_3	$-e_{13}$
e_3	e_{31}	e_{32}	1	e_{123}	$-e_1$	$-e_2$	e_{12}
e_{12}	$-e_2$	e_1	e_{123}	-1	$-e_{23}$	e_{13}	$-e_3$
e_{13}	$-e_3$	$-e_{123}$	e_1	e_{23}	-1	$-e_{12}$	e_2
e_{23}	e_{123}	$-e_3$	e_2	$-e_{13}$	e_{12}	-1	$-e_1$
e_{123}	e_{23}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1

Tabulka 2.1: Vztahy mezi bázovými prvky v $Cl(3,0)$

Z tabulky jde vidět, že bivektory e_{12} , e_{13} a e_{23} opět odpovídají imaginárním jednotkám. Označme tedy e_{12} , e_{13} , e_{23} jako k, j, i . Dále je z tabulky zřejmé, že:

$$\begin{aligned} e_{12} e_{23} &= e_{13} & ki &= j \\ e_{23} e_{12} &= -e_{13} & ik &= -j \\ e_{23} e_{13} &= e_{12} & ij &= k \\ e_{13} e_{23} &= -e_{12} & ji &= -k \\ e_{12} e_{13} &= -e_{23} & kj &= -i \\ e_{13} e_{12} &= e_{23} & jk &= i \end{aligned} \tag{2.11}$$

Vidíme, že bázové bivektory této algebry se chovají stejně jako imaginární jednotky kvaternionů. Algebra $Cl(3,0)$ je tedy izomorfní s algebrou kvaternionů.

2.3. PŘÍKLADY CLIFFORDOVÝCH ALGEBER

2.3.3. Cliffordova algebra $Cl(3,1)$

Cliffordova algebra $Cl(3,1)$ má bázi

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}, e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}, e_{1234}\}. \quad (2.12)$$

Pro bázevé prvky vektorového prostoru, který generuje Cliffordovu algebru $Cl(3,1)$ platí:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= e_2^2 = e_3^2 = 1 \\ e_4^2 &= -1 \\ e_i e_j &= -e_j e_i \end{aligned}$$

Dále budu v bakalářské práci používat nové označení pro $e_3 = e_+$ a $e_4 = e_-$. Pseudoskalár Cliffordovy algebry $Cl(3,1)$ je $I = e_1 e_2 e_3$. Cliffordova algebra $Cl(3,1)$ společně s vložením Euklidovské roviny do algebry nám umožňuje rotace a translace geometrických objektů. Příklady v této kapitole jsou záměrně zvoleny z Cliffordovy algebry $Cl(3,1)$, jelikož ji budu využívat v další kapitole, která se věnuje geometrické algebře $G(3,1)$. Geometrická algebra $G(3,1)$ obsahuje body, kružnice a přímky.

3. Geometrická algebra $G(3,1)$

Geometrickou algebru lze chápat jako Cliffordovu algebru spolu s vložením bodů do soustavy souřadnic. Hlavní výhodou geometrické algebry je její geometrická intuitivnost. Geometrické objekty, jejich průsečíky, vzdálenosti, úhly mezi nimi a i různé transformace je v geometrické algebře možné vyjádřit pomocí algebraických výrazů.

3.1. Algebraická struktura

Zavedeme nové báze vektory e_0 a e_∞ , kde e_0 má význam počátku a e_∞ nekonečna. Tyto báze vektory jsou definovány vztahy:

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{2}(e_- - e_+), e_\infty = e_- + e_+ \\ e_0^2 &= e_\infty^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Věta 11. Vnitřní součin bází e_0 a e_∞ je roven -1 .

Důkaz

$$e_0 \cdot e_\infty = \frac{1}{2}(e_- - e_+)(e_- + e_+) = \frac{1}{2}(e_- \cdot e_- - e_- \cdot e_+ + e_+ \cdot e_- - e_+ \cdot e_+) = -1$$

Věta 12. Mezi nově zavedenými báze vektory platí následující vztah:

$$e_0 e_\infty = -2 - e_\infty e_0.$$

Důkaz

$$\begin{aligned} e_\infty e_0 &= e_\infty \wedge e_0 + e_\infty \cdot e_0 = e_\infty \wedge e_0 - 1 \\ e_0 e_\infty &= e_0 \wedge e_\infty + e_0 \cdot e_\infty = -e_\infty \wedge e_0 - 1 = -2 - e_\infty e_0 \end{aligned}$$

3.1.1. Vložení bodů do $G(3,1)$

Reprezentace 2D bodů $\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2$ z Euklidovské roviny je v geometrické algebře $G(3,1)$ definována pomocí inverzní stereografické projekce následovně:

$$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0, \quad (3.2)$$

3.1.2. Vzdálenost dvou bodů

Věta 13. Necht P a Q jsou libovolné body vložené do algebry ve smyslu 3.2, pak jejich vzdálenost odpovídá $-\frac{1}{2}||\mathbf{q} - \mathbf{p}||^2$, kde $||\mathbf{q} - \mathbf{p}||$ je Euklidovská vzdálenost.

Důkaz

$$P \cdot Q = -\frac{1}{2}(q_2^2 - 2p_2 q_2 + q_1^2 + p_2^2 - 2p_1 q_1 + p_1^2) = -\frac{1}{2}\{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2\} = -\frac{1}{2}||\mathbf{q} - \mathbf{p}||^2$$

Poznámka 14. $P \cdot e_\infty = (\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + e_0) \cdot e_\infty = -1$. Tento vztah se nám bude hodit k důkazům vět.

3.2. Reprezentace objektů

Definice 21. Necht A je množina bodů v \mathbb{R}^2 . Tato množina je v algebře *vnitřně reprezentována* prvkem $A_I \in G(3,1)$ právě tehdy, když $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : X \cdot A_I = 0\}$, kde X jsou vložené body ve smyslu 3.2.

Definice 22. Necht A je množina bodů v \mathbb{R}^2 . Tato množina představuje v algebře *vnější reprezentaci* prvku $A_O \in G(3,1)$ právě tehdy, když $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : X \wedge A_O = 0\}$, kde X jsou vložené body ve smyslu 3.2.

Vztah mezi reprezentacemi K převodu z vnitřní do vnější reprezentace a naopak se využívá vlastností duality. Z věty 10 platí:

$$A_O^* = A_I. \quad (3.3)$$

3.3. Geometrické objekty vyskytující se v $G(3,1)$

3.3.1. Dvojbod

Vnějším součinem dvou prvků z $G(3,1)$ dostáváme dvojbod, který jsme v geometrické algebře schopni popsat pomocí jediné informace.

Věta 14. Necht $C_1, C_2 \in G(3,1)$ jsou dvě různé kružnice, pak $C_1 \wedge C_2$ je dvojbod.

Důkaz S využitím definice vnitřní reprezentace 21 a vztahu 2.7 dostáváme:

$$X \cdot (C_1 \wedge C_2) = (X \cdot C_1)C_2 - (X \cdot C_2)C_1 = 0 \Leftrightarrow (X \cdot C_1) = 0 \text{ a zároveň } (X \cdot C_2) = 0$$

Z $(X \cdot C_1) = 0$ vidíme, že X leží na kružnici C_1 a stejně i pro C_2 . Dvojbod tedy leží na průsečíku C_1 a C_2 . Dostáváme tedy vnitřní reprezentaci dvojvodu. Vnější reprezentace je zřejmě $P_1 \wedge P_2$.

Poznámka 15. Jedná-li se o průsečík dvou přímek, pak má vnější reprezentaci

$$PP^* = P \wedge e_\infty \quad (3.4)$$

Nejedná se totiž o dvojici bodů, ale o jeden reálný bod a druhý bod v nekonečnu.

3.3.2. Kružnice

Kružnice zadána středem a poloměrem

Věta 15. Necht S je střed kružnice a r její poloměr, pak kružnice je dána předpisem

$$C = S - \frac{1}{2}r^2e_\infty \quad (3.5)$$

Důkaz S využitím vztahu pro součin bodu s e_∞ (14), věty o vzdálenosti dvou bodů 13 a vlastnosti vnitřní reprezentace 21 dostáváme:

$$A \cdot C = A \cdot \left(S - \frac{1}{2}r^2 e_\infty\right) = A \cdot S - A \cdot \frac{1}{2}r^2 e_\infty = -\frac{1}{2}||\mathbf{s} - \mathbf{p}||^2 + \frac{1}{2}r^2 = 0$$

$$r = ||\mathbf{s} - \mathbf{p}||$$

Kružnice zadána středem a bodem na ní ležícím

Věta 16. Necht S je střed kružnice a A bod na ní ležící, pak je kružnice dána předpisem

$$C = A \cdot (S \wedge e_\infty) \quad (3.6)$$

Důkaz S využitím vlastnosti vnitřního součinu (2.7), věty o vzdálenosti dvou bodů 13 a vztahu pro součin bodu s e_∞ (14) dostáváme:

$$A \cdot (S \wedge e_\infty) = (A \cdot S)e_\infty - (A \cdot e_\infty)S = -\frac{1}{2}r^2 e_\infty - ([a + \frac{1}{2}a^2 e_\infty + e_0] \cdot e_\infty)S =$$

$$-\frac{1}{2}r^2 e_\infty - (-1)S = S - \frac{1}{2}r^2$$

Věta 17. Necht $A, B \in G(3,1)$ jsou dva libovolné body, pak osa úsečky AB je dána vztahem $(A - B)$.

Důkaz Vezměme libovolný $X \in G(3,1)$ pro ten platí : $X \cdot A = X \cdot B$ právě tehdy, když $X \cdot (A - B) = 0$. Množina všech takovýchto bodů má tedy stejnou vzdálenost od bodu A i B .

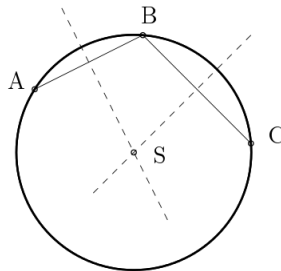
Kružnice zadána 3 body

Věta 18. Necht A, B, C jsou libovolné body, pak kružnice, která jimi prochází je dána předpisem

$$C = A \wedge B \wedge C \quad (3.7)$$

Důkaz S využitím věty o ose úsečky 17 a vztahu dvoj bodu (3.4) dostáváme :

$$A \wedge B \wedge C = A \wedge (A - B) \wedge (B - C) = A \wedge (S \wedge e_\infty)^* = (A \cdot (S \wedge e_\infty))^* \quad (3.8)$$



Obrázek 3.1: Kružnice vytvořená třemi body

3.3. GEOMETRICKÉ OBJEKTY VYSKYTUJÍCÍ SE V $G(3,1)$

3.3.3. Přímka

Věta 19. Necht \mathbf{n} je vektor Euklidovském prostoru a d vzdálenosti od počátku systému souřadnic, pak přímka je dána přepisem

$$L = \mathbf{n} + de_\infty. \quad (3.9)$$

Důkaz S využitím vztahu pro vnitřní reprezentaci 21 víme, že platí : $X \cdot L = 0$ právě tehdy, když množina bodů $X \in G(3,1)$ je vložení přímky L . S využitím vztahu pro součin bodu s e_∞ (14) a touto skutečností dostáváme:

$$X \cdot L = x_1 n_1 + x_2 e_2 + (e_0 e_\infty) \cdot d = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d = 0.$$

Dostáváme tedy skutečně množinu bodů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, které vložené do geometrické algebry představují přímku.

Přímku také můžeme považovat za kružnici, kde dva body leží na přímce a třetí je v nekonečnu:

$$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty \quad (3.10)$$

Nyní máme nadefinované všechny objekty a operace, které se v geometrické algebře $G(3,1)$ vyskytují. V následující tabulce uvedu pro přehlednost shrnutí základních prvků vyskytujících se v geometrické algebře $G(3,1)$.

Prvek	význam
e_1, e_2	2D báze vektory
e_0	počátek
e_{inf}	nekonečno
AB	geometrický součin A a B
$A \cdot B$	vnitřní součin A a B
$A \wedge B$	vnější součin A a B
A^*	duální prvek k A
A^{-1}	inverzní prvek k A
\bar{A}	reverzní prvek k A

Tabulka 3.1: Základní prvky v geometrické algebře $G(3,1)$

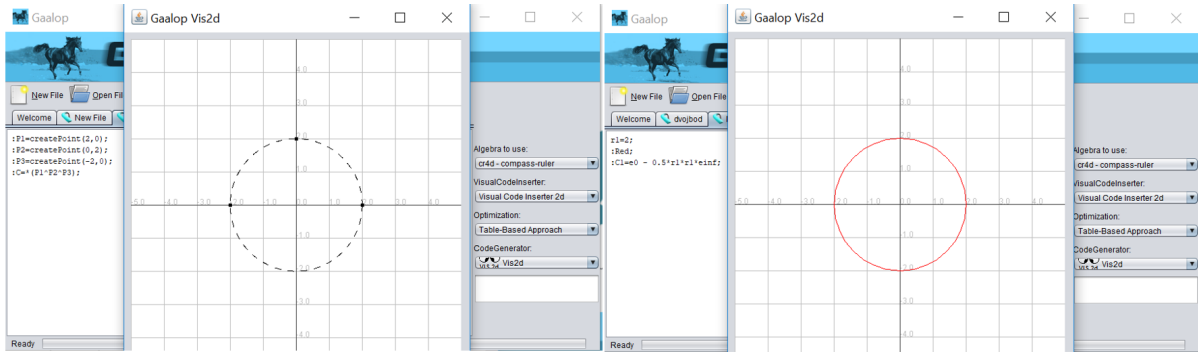
3. GEOMETRICKÁ ALGEBRA $G(3,1)$

Postupně jsme uvedli všechny objekty, které se v geometrické algebře $G(3,1)$ vyskytují. V následující tabulce shrneme zjištěné poznatky.

Prvek	Vnitřní reprezentace	Vnější reprezentace
bod	$P = x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0$	
kružnice	$C = P - \frac{1}{2}r^2e_\infty$	$C^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
přímka	$L = \mathbf{n} + de_\infty$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
dvojbod	$P_p = C_1 \wedge C_2$	$P_p^* = P_1 \wedge P_2$

Tabulka 3.2: Geometrické objekty v geometrické algebře $G(3,1)$

Příklad Chceme dokázat, že vnější a vnitřní reprezentace skutečně popisuje stejné objekty. Vezměme body $P_1 = [2,0], P_2 = [0,2], P_3 = [-2,0]$. Střed takovéto kružnice je evidentně v bodě $P = [0,0]$. K dokázání příkladu použijí program GAALOP, který je vhodný na počítání v geometrické algebře. Samotnému programu GAALOP se budu více věnovat v podkapitole 3.6, kde bude program využíván k aplikacím geometrické algebry.



Obrázek 3.2: Kružnice vzniklé vnější a vnitřní reprezentací

Vidíme, že kružnice mají shodný střed i poloměr. Jedná se tedy o totožné kružnice. Ukázali jsme, že obě reprezentace jsou skutečně zaměnitelné.

3.4. Vzdálenosti a úhly v geometrické algebře

K určování úhlů a vzdáleností mezi objekty využíváme vlastností vnitřního součinu.

3.4.1. Vzdálenost bodu a přímky

Věta 20. Necht P je libovolný bod a L přímka, pak jejich vzdálenost je :

$$P \cdot L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - d, \quad (3.11)$$

kde $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$ je Euklidovská vzdálenost bodu od přímky

Důkaz Využitím vztahu pro součin bodu s e_∞ (14) dostáváme:

$$P \cdot L = P \cdot (\mathbf{n} + de_\infty) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - d$$

3.4. VZDÁLENOSTI A ÚHLY V GEOMETRICKÉ ALGEBŘE

3.4.2. Vzdálenost přímky a kružnice

Věta 21. Necht L je libovolná přímka a C libovolná kružnice, pak vzdálenost středu kružnice od přímky je : $L \cdot C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - d$

Důkaz Využitím vztahu pro součin bodu s e_∞ (14) a vztahu bázevého prvku e_∞ (3.1) dostáváme:

$$L \cdot C = (\mathbf{n} + de_\infty) \cdot (S - \frac{1}{2}r^2e_\infty) = (\mathbf{n} + de_\infty) \cdot (\mathbf{s} + \frac{1}{2}(\mathbf{s}^2 - r^2)e_\infty + e_0) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} - d$$

3.4.3. Úhel mezi dvěma přímkami

Věta 22. Necht L_1 a L_2 jsou 2 normované přímky, pak úhel mezi nimi je $\cos(\theta) = L_1 \cdot L_2$

Důkaz Využitím vztahu bázevého prvku e_∞ (3.1) a vlastnosti skalárního součinu dostáváme:

$$L_1 \cdot L_2 = (\mathbf{n}_1 + de_\infty) \cdot (\mathbf{n}_2 + de_\infty) = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos(\theta) \quad (3.12)$$

3.4.4. Tečná vzdálenost bodu od kružnice

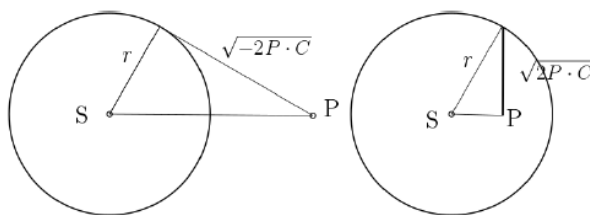
Věta 23. Necht C je libovolná kružnice a P bod, který v ní neleží, pak tečná vzdálenost je dána vztahem : $\sqrt{-2P \cdot C} = \sqrt{(\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 - r^2}$

Důkaz Využitím vztahu bázevého prvku e_∞ (3.1) dostáváme:

$$P \cdot C = (\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2e_\infty + e_0) \cdot (S - \frac{1}{2}r^2e_\infty) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 - 2P \cdot C = (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 - r^2$$

Je-li bod vně kružnice, pak platí

$$2P \cdot C = r^2 - (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 \quad (3.13)$$



Obrázek 3.3: Tečná vzdálenost bodu od kružnice

3.4.5. Vzdálenost dvou kružnic

Poznámka 16. Necht C_1 a C_2 jsou dvě libovolné kružnice, pak platí následující vztahy :

- $\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) \geq C_1 \cdot C_2 \geq r_1r_2 \longleftrightarrow C_2$ je uvnitř C_1 .
- $C_1 \cdot C_2 = r_1r_2 \longleftrightarrow C_2$ se dotýká zevnitř C_1 .

- $|C_1 \cdot C_2| < r_1 r_2 \iff C_2$ a C_1 se protínají.
- $C_1 \cdot C_2 = -r_1 r_2 \iff C_1$ a C_2 se dotýkají.
- $C_1 \cdot C_2 < -r_1 r_2 \iff C_2$ je vně C_1 .

3.5. Transformace v geometrické algebře $G(3,1)$

Reflexe, rotace a translace jsou velmi snadno realizovatelné v geometrické algebře. Rotace a translace jsou reprezentovány rotory a translatory. Tyto transformace je možno skládat dohromady a také se nám nabízí možnost použít transformace kolem námi zvoleného bodu. Objekty transformuje tzv. sendvičovým způsobem, tedy obnásobíme objekt z obou stran. Zleva operátorem transformace a zprava jeho reverzí.

3.5.1. Reflexe

Reflexe je základní transformačním prvkem. Každý transformační prvek je možné reprezentovat pomocí reflexí.

Věta 24. Necht L je libovolná přímka, pak za reflexi považujeme vztah:

$$\tilde{L}oL = -LoL, \quad (3.14)$$

kde L je přímka, podle níž reflexi provedeme a o je geometrický objekt je reflexe.

Důkaz

$$\begin{aligned} -LoL &= (-\mathbf{n} - de_\infty)o(\mathbf{n} + de_\infty) = (-\mathbf{n}o - de_\infty o)(\mathbf{n} + de_\infty) = \\ &= -\mathbf{n}^2 o - d\mathbf{n}oe_\infty - d\mathbf{n}e_\infty o = -\mathbf{n}^2 o - d\mathbf{n}oe_\infty + d\mathbf{n}oe_\infty = -\mathbf{n}^2 o \end{aligned}$$

Vidíme, že geometrický objekt se nezměnil, pouze se přemístil.

Příklad 6.

$$\begin{aligned} -LCL &= (-\mathbf{n} - de_\infty)(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^2 e_\infty + e_0 - \frac{1}{2}r^2 e_\infty)(\mathbf{n} + de_\infty) \\ &= (\mathbf{n}\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{n}\mathbf{s}^2 e_\infty + \mathbf{n}e_0 - \frac{1}{2}\mathbf{n}r^2 e_\infty - d\mathbf{s}e_\infty + d)(\mathbf{n} + de_\infty) \\ &= \mathbf{n}^2 \mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{n}^2 \mathbf{s}^2 e_\infty + \mathbf{n}^2 e_0 - \frac{1}{2}\mathbf{n}^2 r^2 e_\infty \\ &= \mathbf{n}^2 (\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^2 e_\infty + e_0 - \frac{1}{2}r^2 e_\infty) = \mathbf{n}^2 C \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy posunutou kružnici

3.5.2. Rotace se středem v počátku

Je známé, že složení dvou reflexí je shodné s rotací o dvojnásobný úhel, který svírají osy reflexe.

Věta 25. Necht θ je úhel mezi dvěma osami rotace, pak $R = \cos(\frac{\theta}{2}) - e_1 \wedge e_2 \sin(\frac{\theta}{2})$ nazveme rotorem.

3.5. TRANSFORMACE V GEOMETRICKÉ ALGEBŘE $G(3,1)$

Důkaz Necht L_1 a L_2 jsou dvě přímky procházející počátkem :

$$L_1 = n_1 e_1 + n_2 e_2$$

$$L_2 = m_1 e_1 + m_2 e_2$$

pak složení dvou reflexí spočteme jako $L_1 L_2$.

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= L_1 L_2 = L_1 \cdot L_2 + L_1 \wedge L_2 = |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{m}| \cdot \cos \frac{\theta}{2} + (n_1 m_2 e_1 \wedge e_2 + n_2 m_1 e_2 \wedge e_1) = \\ &= |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{m}| \cdot \cos \frac{\theta}{2} + e_1 \wedge e_2 (n_1 m_2 - n_2 m_1) = |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{m}| \cdot \cos \frac{\theta}{2} a + e_1 \wedge e_2 |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{m}| \cdot \sin \frac{\theta}{2} = \\ &\quad \cos \frac{\theta}{2} + e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Věta 26. Necht θ je úhel mezi dvěma normalizovanými přímkami, pak rotor je také výraz tvaru $R = e^{-\frac{\theta}{2} e_1 \wedge e_2}$

Důkaz Rozvoj Eulerova čísla do mocniné řady vypadá následovně:

$$\begin{aligned} R &= 1 + \frac{-e_1 \wedge e_2 \frac{\theta}{2}}{1!} + \frac{(-e_1 \wedge e_2 \frac{\theta}{2})^2}{2!} + \frac{(-e_1 \wedge e_2 \frac{\theta}{2})^3}{3!} + \frac{(-e_1 \wedge e_2 \frac{\theta}{2})^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\frac{\theta^2}{2}}{2!} + \frac{\frac{\theta^4}{2}}{4!} - \frac{\frac{\theta^6}{2}}{6!} \dots - e_1 \wedge e_2 \frac{\frac{\theta^3}{2}}{1!} + e_1 \wedge e_2 \frac{\frac{\theta^5}{2}}{3!} - e_1 \wedge e_2 \frac{\frac{\theta^7}{2}}{5!} + \dots \\ &= \cos \frac{\theta}{2} - e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Poznámka 17. Díky rovnici (2.11) víme, že $e_1 \wedge e_2$ představuje imaginární jednotku, dostáváme tedy pro rotor přepis :

$$R = \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}$$

3.5.3. Translace

Věta 27. Necht $\mathbf{t} = t_1 e_1 + t_2 e_2$ je vektor, pak operátor translace je ve tvaru $T = 1 - \frac{1}{2} \mathbf{t} e_\infty$

Důkaz Necht L_1, L_2 jsou dvě rovnoběžné normalizované přímky, tedy $L_1 = \mathbf{n} + d_1 e_\infty$ a $L_2 = \mathbf{n} + d_2 e_\infty$. Složení dvou rovnoběžných reflexí opět spočítáme jako $L_1 L_2$.

$$T = L_1 L_2 = (\mathbf{n} + d_2 e_\infty)(\mathbf{n} + d_1 e_\infty) = 1 - \mathbf{n}(d_2 - d_1) e_\infty \quad (3.15)$$

Označme nyní vektor translace t jako $2\mathbf{n}(d_2 - d_1)$. Dosazením zpět do rovnice (3.15) dostáváme : $T = 1 - \frac{1}{2} t e_\infty$.

3.5.4. Obecná rotace

Obnásobením operátoru rotace operátorem translace dostáváme nový pohyb, a tím je rotace kolem libovolného bodu. Jedná se totiž o posunutí objektu do počátku, jeho orotování a posunutí zpět.

Věta 28. Necht θ je libovolný úhel a P je libovolný bod, pak operátor rotace kolem tohoto bodu je $\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} (P \wedge e_\infty)^*$.

Důkaz

$$\begin{aligned}
M &= TR\tilde{T} = (1 - \frac{1}{2}te_\infty)(\cos \frac{\theta}{2} - e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2})(1 + \frac{1}{2}te_\infty) \\
&= (\cos \frac{\theta}{2} - e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}te_\infty \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}te_\infty e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2})(1 + \frac{1}{2}te_\infty) \\
&= \cos \frac{\theta}{2} - e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}te_\infty \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}te_\infty e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \frac{1}{2}te_\infty \\
&\quad - e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2} \frac{1}{2}te_\infty - \frac{1}{4}t^2 e_\infty^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}t^2 e_\infty^2 e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\theta}{2} \\
&= \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} e_1 \wedge e_2 - \sin \theta e_1 \wedge e_2 te_\infty \\
&= \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} PP \\
&= \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} (P \wedge e_\infty)^*
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Poznámka 18. Operátor obecné rotace popsaný ve větě 28 se dá vyjádřit jako $e^{\frac{\theta}{2}(P \wedge e_\infty)^*}$, kde e je definováno v Cliffordové algebře. Důkaz je obdobný jako v případě důkazu věty 26 s využitím vztahu (3.16).

3.5.5. Složený pohyb

Složený pohyb se dá vyjádřit jako složení dvou transformací. Složený pohyb tedy může být složení dvou obecných rotací, nebo složení translace a rotace. Operátor složeného pohybu odpovídá vynásobení dvou požadovaných operátorů. Jelikož feometrická algebra není komutativní, pak součin dvou operátorů vyjádřených pomocí eulerova čísla nemůžeme vyjádřit pomocí mocniny eulerova čísla jejich součtu. Na následující rovnici je vidět, proč tomu není možné.

$$I + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = e^{A+B}$$

Dostáváme tedy nekonečnou řadu, kterou nejsme schopni aproximovat. Abychom byli schopni co nejpřesněji určit takovýto exponent, je potřeba uvést Baker-Campbell-Hausdorffovu formuli.

Věta 29. {Baker-Campbell-Hausdorffova formule} Necht X a Y jsou nekomutativní operátory, pak exponent součinu mocnin takovýchto exponentů se dá vyjádřit jako :

$$\ln(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[[X, Y], Y] + \frac{1}{12}[[Y, X], X] + \dots,$$

kde $[X, Y] = (XY - YX)$.

Pro určité příklady můžeme nekonečnou řadu zredukovat na několik málo prvků.

Důkaz Důkaz je dostupný v literatuře 2.

3.6. Aplikace geometrické algebry

Geometrické algebry mají široké uplatnění díky jejich intuitivnosti. Hlavní využití je v Inverzní kinematice, detekování objektů a diskretizaci pohybu. Postupně se budu každému z těchto témat věnovat. Pro realizaci aplikací geometrické algebry budu využívat program GAALOP.

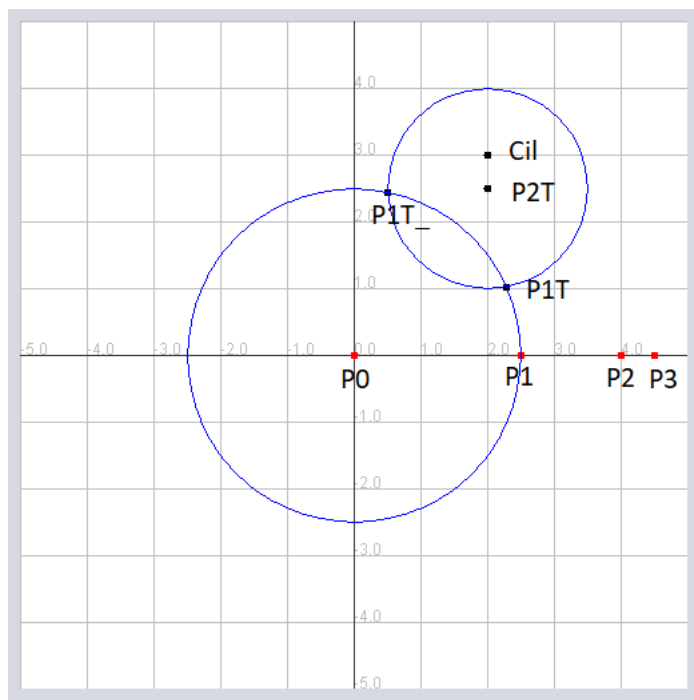
3.6. APLIKACE GEOMETRICKÉ ALGEBRY

Poznámka 19. Program GAALOP, neboli Geometric Algebra Algorithms Optimizer, je software určený k optimalizaci souborů pracujících s geometrickou algebrou. Algoritmy využívají software CLUCalc, který vytvořil Christian Perwass. GAALOP optimalizuje algoritmy a vytváří C++, OpenCL, CUDA, CLUCalc nebo LaTeXový výstup. Za jeho vývojem stojí především Dietmar Hildenbrand. Program je volně stažitelný ze stránek: <http://www.gaalop.de/download/>.

3.6.1. Inverzní kinematika

Inverzní kinematika je matematický proces popisující, jak se objekt dostal z jedné pozice do aktuální. Vezměme v úvahu 3-článekového hada, který se nachází v počáteční pozici P_0, P_1, P_2, P_3 a chceme, aby se dostal do cílové pozice.

```
d1=2.5;           %delka prvnioho clanku
d2=1.5;           %delka druheho clanku
d3=0.5;           %delka trethioho clanku
tx=2;             %souradnice cilove polohy
ty=3;
DissectFirst={-(-sqrt(abs(_P(1)._P(1)))+_P(1))/(einf._P(1))};
DissectSecond={-(sqrt(abs(_P(1)._P(1)))+_P(1))/(einf._P(1))};
                                %vzorecky pro vypocet souradnic dvojvodu
P0=e0;             %souradnice pocatku hada
P1=createPoint(d1,0);           %bod urcujici konec prvnioho clanku
P2=createPoint(d1+d2,0);        %bod urcujici konec druheho clanku
P3=createPoint(d1+d2+d3,0);     %bod urcujici konec hada
Cil=createPoint(tx,ty);         %bod cilove polohy
P2T=createPoint(tx,ty-d3);      %urcime cilovy konec druheho clanku
C1=P0-0.5*d1*d1*einf;          %kruznice z pocatku hada s polomerem d1
C2=P2T-0.5*d2*d2*einf;         %kruznice z konce 2. clanku s polomerem d2
PP=C1^C2;                   %hledany konec 1. clanku lezi na pruseciku C1 a C2
P1T=DissectFirst(*PP);        %1. moznost hledaneho bodu
P1T_=DissectSecond(*PP);      %2. moznost hledaneho bodu
:Red;           %vykresleni
:P0;
:P1;
:P2;
:P3;
:Blue;
:C1;
:C2;
:Black;
:Cil;
:P2T;
:P1T;
:P1T_;
```



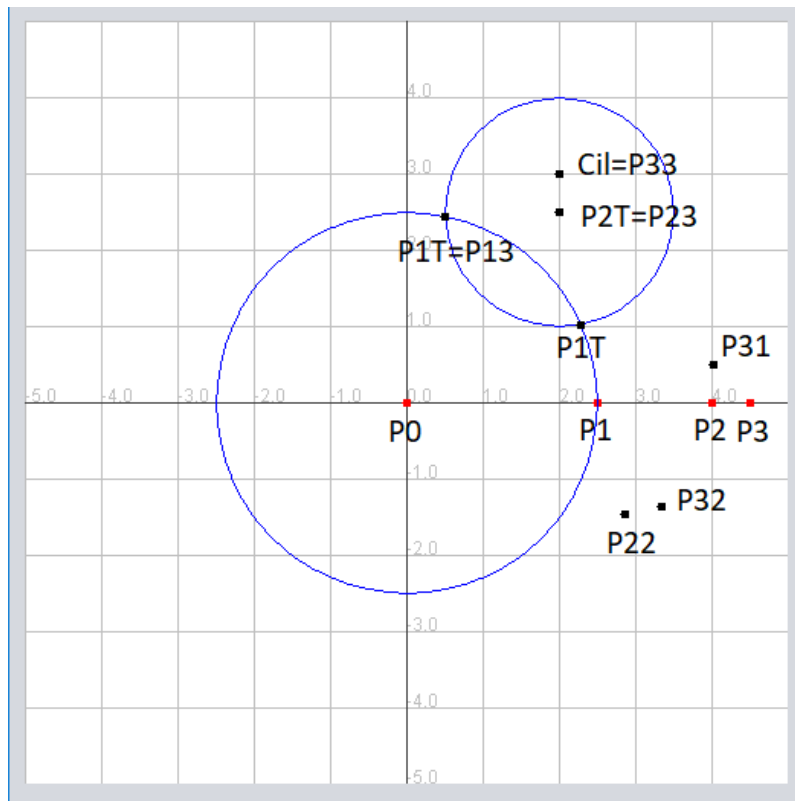
Obrázek 3.4: Graf inverzní kinematiky

Nyní když víme, v jakých koncových polohách budou všechny články hada, můžeme do počítat i motory, které umožňují transformaci hada do nové polohy. Použijeme k tomu přímky procházející články hada. Nejprve celého hada posuneme na přímku procházející body $P0, P1T_-$, poté druhý a třetí článek na přímku procházející body $P1T_-$ a $P2T$ a nakonec vhodně natočíme třetí článek.

Označíme přímku procházející počáteční polohou hada jako $L0$, přímku procházející body $P0$ a $P1T_-$ jako $L1$, $P1T_-$, $P2T$ jako $L2$ a poslední přímku procházející Cílem a bodem $P2T$ jako $L3$.

```
L0=e2; %prvni primka
L1=(P0^P1T_~einf); %druha primka
L2=(P1T_~P2T~einf); %treti primka
L3=(P2T~Cil~einf); %ctvrta primka
Phi1=acos(-L0.L1/abs(L1)); %uhel mezi 1. a 2. primkou
Phi2=acos(-L1.L2/(abs(L2)*abs(L1))) - 3.14; %uhel mezi 2. a 3. primkou
Phi3=acos(L2.L3/(abs(L3)*abs(L2))); %uhel mezi 3. a 4. primkou
M1=cos(Phi1/2) - sin(Phi1/2)*e1^e2; %motor tocici vsemi clanky
M2=cos(Phi2/2) - sin(Phi2/2)*(* (P1~einf)); %motor tocici 2. a 3. clankem
M3=cos(Phi3/2) - sin(Phi3/2)*(* (P2~einf)); %motor tocici s 3. clankem
:P31=M3*P3*~M3; %konec 3. clanku po orotovani 3. motorem
:P32=M2*P31*~M2; %konec 3. clanku po orotovani 3. a 2. motorem
:P22=M2*P2*~M2; %konec 2. clanku po orotovani 2. motorem
:P13=M1*P1*~M1; %konec 3. clanku po orotovani vsemi motory
:P23=M1*P22*~M1; %konec 2. clanku po orotovani 2. i 1. motorem
:P33=M1*P32*~M1; %konec 1. clanku po orotovani 1. motorem
```

3.6. APLIKACE GEOMETRICKÉ ALGEBRY



Obrázek 3.5: Graf pohybu tříčlankového hada

3.6.2. Diskretizace pohybu

Geometrická algebra nám umožňuje velmi lehce diskretizovat pohyb. Můžeme tedy v každém okamžiku pohybu určit, v jaké poloze se těleso nachází. Eulerovy úhly tuto možnost sice také nabízí, ale přepočítávat v každém okamžiku matici rotace může být početně velmi náročné. V geometrické algebře stačí podělit exponent ve vzorci pro operaci transformace požadovaným krokem. V každém z operátorů transformace se vyskytuje úhel spolu s kombinací bodů či bázevých vektorů. Podělením exponentu se tedy změní jen velikost úhlu. Uvedu příklad obecné rotace, u které známe přesně tvar operátoru transformace. U složených pohybů by diskretizace byla obdobná, změnil by se jen operátor transformace. Další výhodou tohoto přístupu je v tom, že kružnici bereme jako jeden objekt, výpočtová náročnost je tedy nižší.

Mějme kružnici s poloměrem $r = 0.7$ a středem v $P = [3, -3]$ a otáčejme ji o 130° . Diskretizujeme tuto rotaci s krokem $\frac{1}{6}$ otočky.

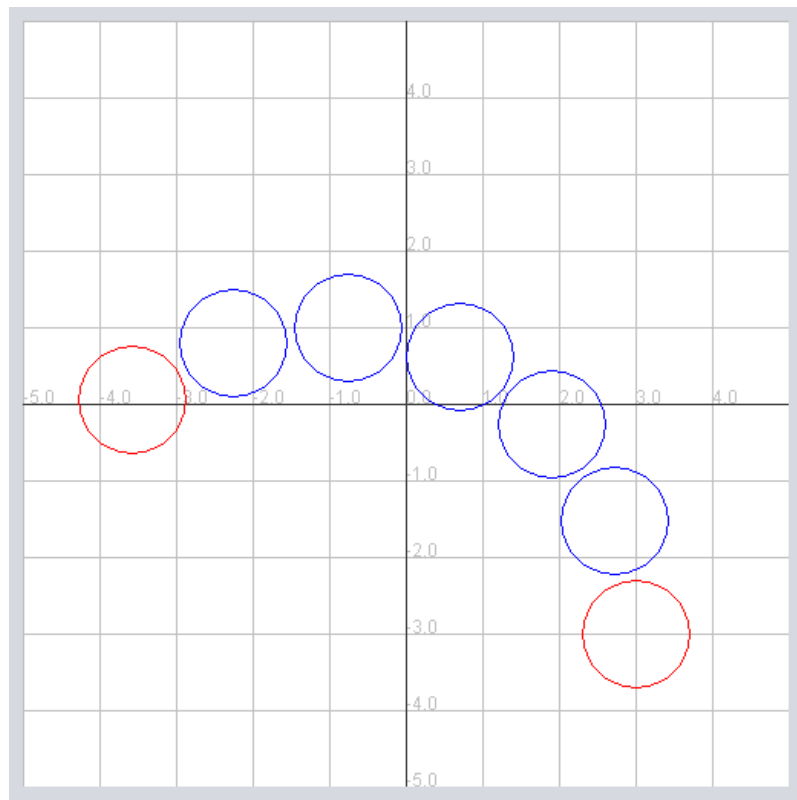
```
d1=0.7; %polomer kruznice
P=createPoint(3,-3); %stred kruznice
P2=createPoint(-1,-3); %stred rotace
PP=(P2^einf); %dvojbod
C=P-0.5*d1*d1*einf; %vytvoreni kruznice
angle=130/6; %uhel jednoho kroku
alpha=(angle/180)*3.1415;
%%CYKLUS
M=cos(alpha/2)-sin(alpha/2)*PP; %prislusny rotor
C1=M*C*~M; %orotovaná kruznice
M2=cos(2*alpha/2)-sin(2*alpha/2)*PP;
C2=M2*C*~M2;
M3=cos(3*alpha/2)-sin(3*alpha/2)*PP;
C3=M3*C*~M3;
M4=cos(4*alpha/2)-sin(4*alpha/2)*PP;
C4=M4*C*~M4;
```

3. GEOMETRICKÁ ALGEBRA $G(3,1)$

```

M5=cos (5*alpha/2)-sin (5*alpha/2)*PP;
C5=M5*C*~M5;
M6=cos (6*alpha/2)-sin (6*alpha/2)*PP;
C6=M6*C*~M6;
:Red;
:C;           %vykresleni prvni a konecne kruznice
:C6;
:Blue;
:C1;         %vykresleni kruznic , ktere se vytvari v jednotlivem kroku
:C2;
:C3;
:C4;
:C5;

```



Obrázek 3.6: Graf diskretizace rotačního pohybu kolem bodu $P2=[-1,-3]$

3.6.3. Prokládání kružnic či přímek body

V geometrické algebře $G(3, 1)$ má kružnice a přímka stejnou algebraickou strukturu. Tuto vlastnost využijeme v metodě prokládání kružnice nebo přímky množinou bodů, jelikož jsme schopni vyhodnotit, která křivka je pro množinu bodů vhodnější. Kružnice i přímka jsou v $G(3, 1)$ vektory tvaru:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_\infty + x_4 e_0. \quad (3.17)$$

V přímka je reprezentována tvarem X , kde $x_4 = 0$.

Chceme-li proložit body $\{P_1, P_2, \dots, P_i\}$ kružnici nebo přímku postupujeme následovně:

- Spočítáme tečné vzdálenosti, věta 23, bodu od kružnice nebo přímky.
- Použitím metody nejmenších čtverců minimalizujeme kvadráty tečných vzdáleností.

$$\min \sum_1^n (P_i \cdot X)^2$$

- Vypočítáme vlastní čísla.

Metodu nejmenších čtverců můžeme přepsat pomocí bilineární formy jako:

$$\min(x^T A x),$$

kde $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ a $A = x x^T B / n$, kde B je matice příslušné bilineární (v tomto případě kvadratické) formy, definice 8, a n počet bodů.

Jedná se o standardní optimalizační úlohu, kterou se dá rychle vyřešit pomocí vlastních čísel.

3.6.4. Detekce kružnic v obraze

K detekci kružnic v obraze pomocí geometrické algebry se používá algoritmus CGAVS. Ten se skládá ze dvou částí, lokální a globální fáze. Právě v první části využíváme vlastností geometrické algebry a vypadá následovně.

Vybereme počáteční bod a zvolíme okolí takové, že do něj padnou další body. Nyní najdeme osy stran, vytvořených spojením počátku s příslušným bodem. Jestliže se všechny tyto osy protnou v jednom bodě, pak víme, že kružnice vytvořená tímto bodem a počátkem prochází všemi body z okolí.

Opět vyřešeno pomocí programu Gaalop.

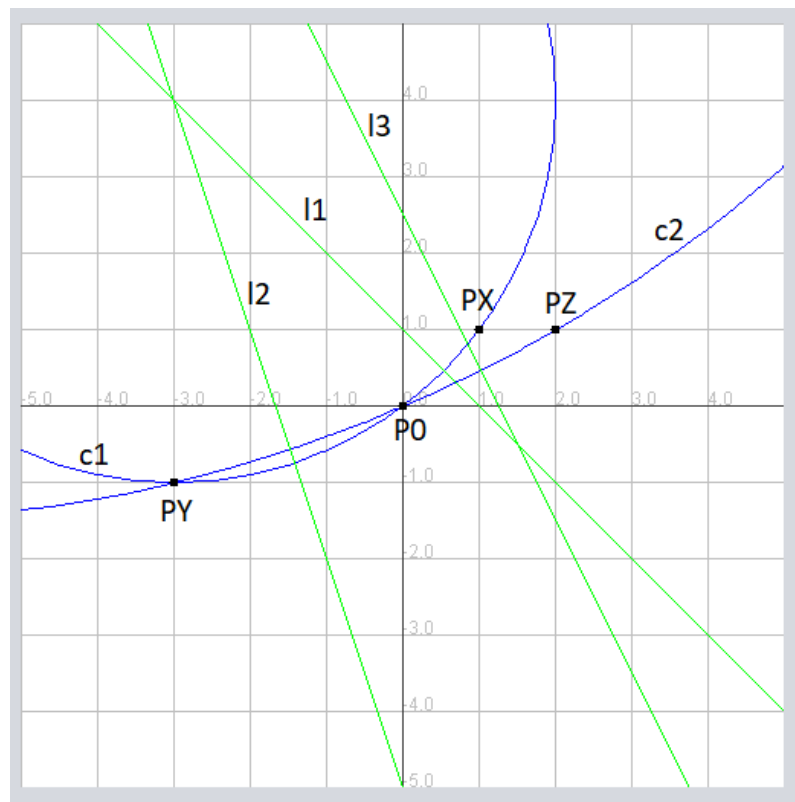
```
px1=1; %souradnice prvnioho bodu
px2=1;
py1=-3; %souradnice druheho bodu
py2=-1;
pz1=2; %souradnice tretiho bodu
pz2=1;
p0=e0; %pocatek
Px=createPoint(px1,px2); %vytvareni bodu
Py=createPoint(py1,py2);
Pz=createPoint(pz1,pz2);
len1=sqrt(px1*px1+px2*px2);
len2=sqrt(py1*py1+py2*py2);
len3=sqrt(pz1*pz1+pz2*pz2);
l1=-(px1/len1)*e1-(px2/len1)*e2-0.5*len1*einf; %primka mezi P0 a P1
l2=-(py1/len2)*e1-(py2/len2)*e2-0.5*len2*einf; %primka mezi P0 a P2
l3=-(pz1/len3)*e1-(pz2/len3)*e2-0.5*len3*einf; %primka mezi P0 a P3
PP1=*(l1^l2); %dvojbod vytvoreny primkou l1 a l2
```

3. GEOMETRICKÁ ALGEBRA $G(3,1)$

```

PP2=*(l2^l3); %dvojbod vytvoreny primkou l2 a l3
IP1=PP1.e0; %vytvoreni 1. kruznice
IP2=PP2.e0; %vytvoreni 2.kruznice
scale1=-IP1.einf;
c1=IP1/scale1; %normalizace 1. kruznice
scale2=-IP2.einf;
c2=IP2/scale2; %%normalizace 2. kruznice
:p0; %vykresleni
:Px;
:Py;
:Pz;
:Green;
:l1;
:l2;
:l3;
:Yellow;
:PP1;
:PP2;
:Blue;
:c1;
:c2;

```



Obrázek 3.7: Graf detekce kružnic v obrazu

Z obrázku je zřejmé, že přímky $l1, l2$ a $l3$ se neprotly v jednom bodě, kružnice $c1$ a $c2$ jsou tedy různé. Body neleží na jedné kružnici.

Závěr

V bakalářské práci jsou rozebrány Cliffordovy algebry, jejich podalgebra kvaterniony a geometrická algebra $G(3,1)$. Geometrická algebra $G(3,1)$ je využita pro popis kinematiky robotického systému. V práci je popsána inverzní kinematika, diskretizace pohybu a detekce kružnice v obraze.

V první aplikaci, věnující se inverzní kinematice, je rozebrán pohyb tříčlankového hada. Je ukázáno využití geometrické algebry $G(3,1)$ pro výpočet rotorů, které otáčí s jednotlivými články.

Druhá aplikace ukazuje diskretizaci rotačního pohybu. Diskretizace pohybu v geometrické algebře $G(3,1)$ docílíme vydělením exponentu v operátoru transformace, je to tedy velice snadné k naprogramování.

Využití geometrické algebry $G(3,1)$ můžeme nalézt i v proložení kružnic či bodů v obraze. Tomuto využití je věnovaná třetí aplikace, kde je popsán postup řešení této problematiky.

Všechny aplikace v této bakalářské práci byly vypracovány s použitím programu GAALOP. Tento program je vyvíjen k práci s geometrickou algebrou $G(3,1)$. Bakalářská práce obsahuje i zdrojové kódy z programu GAALOP. Program je volně stažitelný ze stránek <http://www.gaalop.de/download/>.

Cíle bakalářské práce bylo plně dosaženo a byla prokázána vhodnost využití geometrické algebry $G(3,1)$, podalgebry Cliffordových algeber, pro popis kinematiky používané v robotických systémech.

Reference

- [1] BAYRO-CORROCHANO, Eduardo. *Geometric Computing for Wavelet Transforms, Robot Vision, Learning, Control and Action*. New York: Springer, 2013. Geometry and computing, 8. ISBN 3642317936.
- [2] EICHLER, Martin. *A new proof of the Baker-Campbell-Hausdorff formula*. [online]. 1967 [cit 2018-05-20]. Dostupné z: <https://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1260463291>
- [3] HILDENBRAND, Dietmar. *Foundations of geometric algebra computing*. New York: Springer, 2013. Geometry and computing, 8. ISBN 3642317936.
- [4] HLADÍK, Milan. *Lineární algebra pro informatiky*. [online]. 2003 [cit 2018-05-20]. Dostupné z: <https://kam.mff.cuni.cz/hladik/LA/>
- [5] CHISOLM, Eric. *Geometric algebra*. [online]. 2012 [cit 2018-05-20]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1205.5935>
- [6] LOUNESTO, Pertti. *Clifford algebras and spinors*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2001. ISBN 0521005515.
- [7] PERWASS, Christian. *Geometric algebra with applications in engineering*. Berlin: Springer, c2009. ISBN 354089067X.
- [8] PROŠKOVÁ, Jitka. *Kvaterniony a jejich využití v geometrii*. Plzeň, 2006. Bakalářská práce (Bc.). Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky.
- [9] YAN-BIN, Jia. *Quaternion and Rotation**. [online]. 2017 [cit 2018-05-22]. Dostupné z: https://www.semanticscholar.org/paper/Quaternions-and-Rotations-*-Jia/a00849dd6075976296c963112bf4f37940e243c9